Lógica Proposicional: Deducción Natural (2020)

(Con soluciones)

Ejercicio 1.

Demostrar con deducción natural:

$$T\ [\ p \lor (q \land s) \rightarrow r\ ] \vdash p \rightarrow r$$

Ejercicio 2.

Demostrar con deducción natural:

$$T\ [\ (p \land q) \rightarrow r,\ r \land s) \rightarrow t\ ] \vdash ((p \land q) \land s) \rightarrow t$$

Ejercicio 3.

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso.

$$T\ [\ p \rightarrow q,\ \neg r \rightarrow \neg q,\ r \rightarrow \neg s\ ] \vdash \neg s \lor \neg p$$

Solución

1.	$p \rightarrow q$	premisa		
2.	$\neg r \rightarrow \neg q$	premisa		
3.	$r \rightarrow \neg s$	premisa		
4.		s	supuesto	
5.			p	supuesto
6.			q	modus ponens 1,5

13.	$s \rightarrow \neg p$	I→ 4,12
14.	$\neg s \vee \neg p$	teorema de intercambio con la equiv. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Ejercicio 4.

Demostrar con deducción natural:

$$T [\neg p \rightarrow \neg s , \neg p \vee r , r \rightarrow \neg t] \vdash \neg s \vee \neg t$$

Ejercicio 5.

Demostrar con deducción natural los siguientes razonamientos, usando solo reglas básicas:

1. $T[r \rightarrow q, r \wedge s, s \rightarrow t] \vdash q \wedge t$
2. $T[s, s \vee p \rightarrow \neg q] \vdash \neg q$
3. $T[p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow q, p \vee \neg p] \vdash q$
4. $T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q \wedge t] \vdash p \rightarrow q$
5. $T[ ] \vdash p \rightarrow p \vee q$
6. $T[r \vee q \rightarrow p, s \wedge t, s \rightarrow q] \vdash p$
7. $T[p \rightarrow q, r \rightarrow q, q \rightarrow s, p \vee r] \vdash s \vee t$
8. $T[p \rightarrow q, r \rightarrow q \wedge t, q \rightarrow s, p \vee r] \vdash s \vee t$
9. $T[ ] \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$
10. $T[\neg p \rightarrow q, q \wedge r \rightarrow \neg r, r] \vdash p$
11. $T[\neg p \rightarrow s, \neg q \rightarrow \neg s] \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Ejercicio 6.

Demostrar con deducción natural:

(a) $T [p \rightarrow \neg q , \neg(r \wedge \neg p)] \vdash q \rightarrow \neg r$

(b) $T [p \vee q , p \rightarrow r , \neg s \rightarrow \neg q] \vdash r \vee s$

Ejercicio 7.

Dar una demostración de $(p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$ a partir de las premisas $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$

Ejercicio 9.

Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$T\ [\ p \vee \neg q \rightarrow r\ ] \ \vdash \ \neg r \wedge p \rightarrow \neg q$$

(No se puede utilizar tablas de verdad, resolución ni análisis semántico)

Solución

1: $p \vee \neg q \rightarrow r$ premisa
2: $\neg r \wedge p$ supuesto
3: q supuesto
4: p E∧2
5: $p \vee \neg q$ I 4
6: r E→1,5
7: $\neg r$ E∧2
8: $r \wedge \neg r$ I∧6,7
9: $q \rightarrow r \wedge \neg r$ I→3,8
10: $\neg q$ I¬9
11: $\neg r \wedge p \rightarrow \neg q$ I→2,10

Ejercicio 10.

Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$T\ [\ \neg\, p \vee q\ ,\ q \vee r \rightarrow s\ ,\ \neg\, r \rightarrow p\ ] \vdash s$$

Solución

1. $\neg\, p \vee q$ premisa
2. $q \vee r \rightarrow s$ premisa
3. $\neg r \rightarrow p$ premisa
4. $\neg\neg r \vee p$ Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
5. $r \vee p$ Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
6. $q \vee r$ Regla derivada de corte 1,5
7. s Modus Ponens 2,6

2ª solución:

6 -	$\neg q \wedge \neg r$	De Morgan 5 con th intercambio $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
7 -	$\neg r$	elim $\wedge$ 6
8 -	p	modus ponens 7,3
9 -	q	corte 8,1
10 -	$\neg q$	elim $\wedge$ 6
11 -	$q \wedge \neg q$	int $\wedge$ 9,10
12 -	$\neg\neg s$	int $\neg$ 4, 11
13 -	s	elim $\neg$ 12

Ejercicio 11.

Demostrar con deducción natural:

$$\vdash (p \wedge q \rightarrow \neg r) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$$

Ejercicio 12.

Demostrar con deducción natural:

$$T [\neg A \vee \neg B , C \rightarrow A , D \rightarrow B] \vdash \neg C \vee \neg D$$

Ejercicio 13.

Demostrar con deducción natural:

$$T [\neg p \vee q , q \vee r \rightarrow s , \neg r \rightarrow p] \vdash s$$

Ejercicio 14.

Demostrar con deducción natural:

$$T [p \rightarrow q \vee r, q \rightarrow s, r \rightarrow s, \neg s] \vdash \neg p$$

Ejercicio 16.

Demostrar con deducción natural:

(1) $T [\neg p \rightarrow r , s \vee (q \vee t) , q \rightarrow \neg r , r \rightarrow \neg t] \vdash p \vee s$
(2) $T [t, p \rightarrow \neg t , q \wedge \neg s \rightarrow r , \neg (q \wedge r)] \vdash q \rightarrow \neg p \wedge s$
(3) $T [\neg p \vee (r \wedge \neg t) , \neg s \rightarrow p] \vdash p \rightarrow ((q \vee r \rightarrow \neg p) \rightarrow s)$

Ejercicio 17.

Demostrar con deducción natural

$$T [((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r))] \vdash \neg q \vee (p \vee r)$$

Solución

1-	$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg p \wedge r$	premisa
2-	$\neg(\neg q \vee p \vee r)$	supuesto
3-	$\neg\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 2 con $\neg(A \vee B \vee C) \equiv \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
4-	$q \wedge \neg p \wedge \neg r$	t.i. 3 con $\neg\neg A \equiv A$
5-	$\neg p$	eliminación $\wedge$ 3
6-	$\neg p \vee \neg q$	introducción $\vee$ 5
7-	$\neg p \wedge r$	modus ponens 1,6
8-	r	eliminación $\wedge$ 7
9-	$\neg r$	eliminación $\wedge$ 3
10-	$r \wedge \neg r$	int $\wedge$ 8,9
11-	$\neg\neg(\neg q \vee p \vee r)$	introducción $\neg$ 2,10
12-	$\neg q \vee p \vee r$	eliminación $\neg$ 11

Ejercicio 18.

Demostrar con deducción natural:

$$\vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg (r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$$

Ejercicio 19.

Solución

1ª forma:

1. $p \rightarrow \neg t$ — premisa
2. $q \wedge \neg s \rightarrow r$ — premisa
3. $\neg(q \wedge r)$ — premisa
4. $q \wedge t$ — supuesto
5. p — supuesto
6. $\neg t$ — m. p. 5,1
7. t — elim $\wedge$ 4
8. $t \wedge \neg t$ — int $\wedge$ 6,7
9. $\neg p$ — int $\neg$ 5, 8
10. $\neg s$ — supuesto
11. q — elim $\wedge$ 4
12. $q \wedge \neg s$ — int $\wedge$ 10,11
13. r — modus ponens 12,2
14. $\neg q \vee \neg r$ — De Morgan $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ 3, th intercambio
15. $\neg q$ — corte 13, 14
16. $q \wedge \neg q$ — int $\wedge$ 11,15
17. $\neg\neg s$ — int $\neg$10, 16
18. s — elim $\neg$ 17
19. $\neg p \wedge s$ — int $\wedge$ 9, 18
20. $q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$ — int $\rightarrow$ 4, 19

Justificación:

- puesto que hay que demostrar una implicación, SIEMPRE, "supongamos el antecedente":

1. $p \rightarrow \neg t$ — premisa
2. $q \wedge \neg s \rightarrow r$ — premisa
3. $\neg(q \wedge r)$ — premisa
4. $q \wedge t$ — supuesto

……..

……..

……..

……..

……..

n. $\neg p \wedge s$

n+1. $q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$ — int $\rightarrow$ 4, n

…….
…….
…….
j. $\neg p$
……..
……..
……..
k. s
$\neg p \wedge s$ int $\wedge$ j, k
$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$

- y $\neg p$ y s se demuestran por contradicción:

1. $p \rightarrow \neg t$ premisa
2. $q \wedge \neg s \rightarrow r$ premisa
3. $\neg(q \wedge r)$ premisa

$q \wedge t$ supuesto
p supuesto
……
…..
……
$\neg p$
$\neg s$
……
……
……
……
$\neg\neg s$
s
$\neg p \wedge s$
$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$

2ª solución:

1. $p \rightarrow \neg t$ premisa
2. $q \wedge \neg s \rightarrow r$ premisa
3. $\neg(q \wedge r)$ premisa
4. $q \wedge t$ supuesto

11. $\neg(q \wedge \neg s)$ modus tollens 2,10
12. $\neg q \vee \neg\neg s$ th intercambio en 11 y De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
13. $\neg q \vee s$ th intercambio en 12 y equivalencia $\neg\neg A \equiv A$
14. s corte 9,13
15. $\neg p \wedge s$ int $\wedge$ 7,14
16. $q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$ int $\rightarrow$ 4,15

3ª forma:

1. $p \rightarrow \neg t$ premisa
2. $q \wedge \neg s \rightarrow r$ premisa
3. $\neg(q \wedge r)$ premisa
4. $q \wedge t$ supuesto
5. $\neg(\neg p \wedge s)$ supuesto

$p \vee \neg s$ De Morgan + doble negación

p supuesto

....

....

....

A

.....

.....

$\neg A$

$\neg s$ supuesto

……

……

B

……

$\neg B$

$\neg p \wedge s$ $\rightarrow$ $A \vee B$

$q \wedge t \rightarrow \neg p \wedge s$ $A \vdash C \wedge \neg C$ $\Rightarrow \neg(A \vee B)$

$B \vdash D \wedge \neg D$

Ejercicio 20.

Demostrar con deducción natural:

$$T [q \rightarrow r] \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$$

$$T\ [\ \neg p \rightarrow \neg q\ ] \vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$$

Ejercicio 22.

Probar con Deducción Natural:

$$T\ [\ A \leftrightarrow B\ ] \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Solución

Lo que se pide demostrar es cierto, analizando el significado de las dos fórmulas que aparecen en la deducción: A y B son equivalentes sii A y B son o verdaderos o falsos al mismo tiempo, que es lo que dice textualmente la fórmula $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

1 -	$A \leftrightarrow B$	premisa
2 -	$A \rightarrow B$	elim $\leftrightarrow$ 1
3 -	$B \rightarrow A$	elim $\leftrightarrow$ 1
4 -	$\neg\ (\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\ )$	supuesto
5 -	$\neg\ (A \wedge B) \wedge \neg\ (\neg A \wedge \neg B)$	De Morgan 4
6 -	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$	De Morgan 5
7 -	$A \vee B$	elim $\wedge$ 6
8 -	A	supuesto
9 -	B	modus ponens 8, 2
10 -	B	supuesto
11 -	B	iteración 10
12 -	B	elim $\vee$ 7, 8-9, 10-11
13 -	$\neg A \vee \neg B$	elim $\wedge$ 6
14 -	$\neg A$	supuesto
15 -	$\neg B$	modus tollens, 14, 3
16 -	$\neg B$	supuesto
17 -	$\neg B$	iteración 16
18 -	$\neg B$	elim $\vee$ 13, 14-15, 16-17
19 -	$\neg\neg\ (\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\ )$	int $\neg$ 4, 12, 18
20 -	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	elim $\neg$ 19

Solución

Esquema de la demostración:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
...	.....	
...	.....	
17 -	$\neg s$	
18 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 17
19 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,18

Demostración completa:

1 -	$p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2 -	$\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3 -	$\neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4 -	p	supuesto
5 -	$\neg q$	supuesto
6 -	$q \vee \neg r$	modus ponens 4,1
7 -	$\neg r$	corte 5,7
8 -	$\neg r \rightarrow \neg t$	elim $\leftrightarrow$ 2
9 -	$\neg t$	modus ponens 7,8
10 -	$\neg\neg(p \rightarrow \neg s)$	modus tollens 9,3
11 -	$p \rightarrow \neg s$	doble negación 10
12 -	$\neg s$	modus ponens 4, 11
13 -	$\neg q \rightarrow \neg s$	int $\rightarrow$ 5, 12
14 -	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	int $\rightarrow$ 4,13

Ejercicio 24.

Se considere el siguiente razonamiento:

Pepe, Juan y Nacho son tres chicos.
Ana, María y Cristina son tres chicas.
Cada chico está casado con una de las tres chicas, y cada chica está casada con uno de los tres chicos.

Si Ana está casada con Juan entonces tanto María como Cristina están casadas con extremeños.
Pepe está casado con Cristina.
Por tanto Juan está casado con María.

Después de formalizarlo en el lenguaje de la Lógica Proposicional, demostrar su corrección con deducción natural. Puede ser necesario añadir premisas que, a primera vista, no había que introducir.

Ejercicio 25.

Demostrar con deducción natural:

$$T\,[\, r \vee p \vee q \rightarrow r \vee \neg t ,\ p \rightarrow s ,\ t \rightarrow p \vee q ,\ \neg s \rightarrow \neg q \,] \vdash t \rightarrow r \wedge s$$

Ejercicio 26.

Probar $\{ p \rightarrow \neg q \vee r \} \vDash q \rightarrow \neg (p \wedge \neg r)$

(a) Semánticamente, con el concepto de consecuencia lógica.
(b) Construyendo una demostración con las reglas del cálculo de Deducción Natural y justificando el resultado con el teorema de validez.

Ejercicio 27.

Demostrar con deducción natural:

$$T\,[\, (\neg p \leftrightarrow q) \rightarrow r,\ (r \wedge s) \rightarrow t \,] \vdash ((\neg p \leftrightarrow q) \wedge s) \rightarrow t$$

Ejercicio 28.

Demostrar con deducción natural:

(a) $T\,[\, (p \rightarrow q) \wedge t ,\ (r \vee p) \wedge \neg q ,\ \neg t \leftrightarrow \neg s \,] \vdash r \wedge s$

$$T\ [\ q\to s,\ \neg s \to (\neg p\to s),\ r \wedge \neg t \to q \vee \neg p,\ \neg t, p \to q\ ] \vdash r \to s$$

Solución

1.	q→s			premisa	
2.	¬s→(¬p→s)			premisa	
3.	r∧¬t→q∨¬p			premisa	
4.	¬t			premisa	
5.	p→q			premisa	
6.		r		supuesto	
7.		r∧¬t		∧intro(4,6)	
8.		q∨¬p		→elim(3,7)	
9.			¬s		supuesto
10.			¬p→s		→elim(2,9)
11.			s		∨elim(1,8,12)
12.			s∧¬s		∧intro(11,13)
13.			¬s →s∧¬s		→intro(9-12)
14.		¬¬s		¬intro(13)	
15.		s		¬elim(14)	
16.	r→s		→intro(6-15)"		

Ejercicio 30.

Demostrar con deducción natural:

$$T\ [\ (p \to r) \vee (q \to s)\ ] \vdash (p \wedge q) \to (r \vee s)$$

Solución

1-	(p → r) ∨ (q → s)			premisa	
2-		p ∧ q		supuesto	
3-			p → r		supuesto
4-			p		elim ∧ 2
5-			r		modus ponens 4, 3
6-			r ∨ s		int ∨ 5
7-		(p → r) → (r ∨ s)		int → 3, 6	

Para hacerlo un poco más comprensible se puede añadir:
3- $(p \to r) \lor (q \to s)$ iteración 1

Ejercicio 31.

Después de haber formalizado este razonamiento en el lenguaje de la Lógica Proposicional, demostrar su corrección con medios semánticos y, a continuación, con deducción natural.

Se está organizando el horario del lunes.
Las clases en esta Escuela son de dos horas, y empiezan a las 10h, a las 12h, a las 15h o a las 17h.
La clase de Lógica tiene que ser por la mañana.
La clase de Álgebra tiene que ser después (no necesariamente de forma inmediata) de la de Lógica.
Las clases de Discreta y Programación tienen que ser consecutivas: una detrás de la otra (no importa el orden) y sin pausa para comer entre ellas.
Programación es a las 17h a no ser que Lógica sea a las 12h.
Por tanto, Discreta es a las 15h.

Solución

Además de la información indicada explícitamente en las frases, hay que formalizar también los siguientes hechos que describen la organización de un horario: básicamente, que cada asignatura corresponde a una clase y no hay solapes entre asignaturas.

Lo primero que hay que hacer es identificar las proposiciones: el símbolo de proposición "XN" indica que la asignatura X (primera letra del nombre) es a la hora N. Por ejemplo:

L12 representa "la clase de Lógica es a las 12"
P17 representa "la clase de Programación es a las 17"

Hay 16 proposiciones de este tipo.

Que no pueda haber solapes se expresa con

$A10 \to \neg D10 \land \neg L10 \land \neg P10$
$A12 \to \neg D12 \land \neg L12 \land \neg P12$

$L10 \to \neg A10 \land \neg D10 \land \neg P10$
$L12 \to \neg A12 \land \neg D12 \land \neg P12$
$L15 \to \neg A15 \land \neg D15 \land \neg P15$
$L17 \to \neg A17 \land \neg D17 \land \neg P17$
$P10 \to \neg A10 \land \neg D10 \land \neg L10$
$P12 \to \neg A12 \land \neg D12 \land \neg L12$
$P15 \to \neg A15 \land \neg D15 \land \neg L15$
$P17 \to \neg A17 \land \neg D17 \land \neg L17$

Deberíamos también expresar la condición de que cada asignatura tenga una y una sola clase; esto se puede hacer, aunque en este caso no es necesario para poder demostrar la corrección del razonamiento. Esto se debe a que

- que tenga que haber una clase para cada asignatura es una consecuencia de las condiciones expresadas por las frases que definen el problema;
- que no pueda haber más de una clase de la misma asignatura es una consecuencia de lo anterior y de que las asignaturas no se pueden solapar.

Ahora queda por formalizar el resto de las frases:

$L10 \lor L12$
$(L10 \land (A12 \lor A15 \lor A17)) \lor (L12 \land (A15 \lor A17)) \lor (L15 \land A17)$
$(D10 \land P12) \lor (P10 \land D12) \lor (D15 \land P17) \lor (P15 \land D17)$
$P17 \lor L12$ (esta última frase formaliza el significado del "a no ser que")

La corrección del razonamiento de demuestra de la forma habitual.

Ejercicio 32.

Demostrar los siguientes enunciados con deducción natural. Se puede usar las reglas derivadas y el intercambio.

(1) $T[\, t, p \to \neg t, q \land \neg s \to r, \neg(q \land r)] \vdash q \to \neg p \land s$
(2) $T[\, \neg p \lor (r \land \neg t), \neg s \to p] \vdash p \to ((q \lor r \to \neg p) \to s)$
(3) $T[\, \neg p \to r, s \lor (q \lor t), q \to \neg r, r \to \neg t] \vdash p \lor s$

Solución

1-	$(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p$	supuesto
2-	$\neg p$	supuesto
3-	$\neg(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$	modus tollens 2,1
4-	$\neg(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$	T. intercambio 3, con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
5-	$\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	De Morgan 4 $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ con t. intercambio
6-	$\neg\neg p$	elim $\wedge$ 5
7-	p	elim $\neg$ 6
8-	$\neg p$	iteración 2
9-	$p \wedge \neg p$	int $\wedge$ 7,8
10-	$\neg\neg p$	int $\neg$2, 9
11-	p	elim $\neg$ 10
12-	$((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$	int $\rightarrow$ 1, 11

Comprobación con tablas de verdad:

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$A \equiv ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p)$	$A \rightarrow p$
F	…	…	V	F	V
F	…	…	V	F	V
F	…	…	V	F	V
F	…	…	V	F	V
V	…	…	…	…	V
V	…	…	…	…	V
V	…	…	…	…	V
V	…	…	…	…	V

($\Rightarrow$ NO HACE FALTA llenar toda la tabla)